Αν D_1, D_2 πυκνά ενδέχεται $D_1 \cap D_2 = \emptyset$
(πχ στο $\mathbb{R}$ τα σύνολα $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ πυκνά και $\cap \neq \emptyset$)

Παρατήρηση

Αν U_1, U_2 ανοιχτά και πυκνά $\subseteq (X, \rho)$ μ.χ τότε το $U_1 \cap U_2$ είναι πυκνό.

Αποδ

Εστω G ανοιχτο $\subset X$ μή κενο
Εφόσον U_1 πυκνο έστε $G \cap U_1 \neq \emptyset$
Επισης, $G \cap U_1$ ανοιχτο (ως τομή δύο ανοιχτών)
Εφόσον, το U_2 πυκνο επεται ότι $G \cap U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$
Αρα, το $U_1 \cap U_2$ είναι πυκνο

Πόρισμα

Αν $n \in \mathbb{N}$ και $U_1, \ldots, U_n$ ανοιχτα και μη κενα τότε $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ είναι πυκνό

Πρόταση (Cantor)

Αν (X, ρ) πλήρης μ.χ και (F_n) ακολουθία $\downarrow$ από κλειστα $\subseteq X$ με $\lim_{n \to \infty} diam(F_n) = 0 \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ και μάλιστα $\exists! x \in \bigcap F_n \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$

Θεώρημα (Baire)

Εστω (X, ρ) πλήρης μ.χ και έστω (U_n) ακολουθία ανοιχτών & πυκνών υποσυνόλων του X, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ είναι πυκνό. (στον X)

Αποδ.

Εστω G ανοιχτό και μη κενό $\subseteq X$.
Θδο $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right) \cap G \neq \emptyset$
Εφόσον, U_1 πυκνό και G ανοιχτο & μη κενο
έχουμε ότι $U_1 \cap G \neq \emptyset$, ενώ $U_1 \cap G$ ανοιχτο.

Επιλεγω $x_1 \in U_1 \cap G$ και $\exists \varepsilon_1 > 0$ με $\varepsilon_1 < 1$
τ.ω $C_p(x_1, \varepsilon_1) \subset U_1 \cap G$.
Εφόσον $S_p(x_1, \varepsilon_1)$ ανοιχτο & μη κενο
και το U_2 πυκνο τοτε $U_2 \cap S_p(x_1, \varepsilon_1) \neq \emptyset$
Αρα, $\exists\ x_2 \in \underbrace{U_2 \cap S_p(x_1, \varepsilon_1)}_{\text{ανοιχτο}}$

Αρα, μπορουμε να επιλέξουμε και ενα $\varepsilon_2 > 0$
με $\varepsilon_2 < \frac{1}{2}$ τ/ω
$C_p(x_2, \varepsilon_2) \subset U_2 \cap S_p(x_1, \varepsilon_1)$
Επαγωγικα κατασκευάζουμε ακολουθια
$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον X και αριθμους $0 < \varepsilon_n \leq \frac{1}{n}$
ωστε $C_p(x_n, \varepsilon_n) \subset U_n \cap S_p(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1})$, $\forall n \geq 2$
Παρατηρούμε, οτι $C_p(x_1, \varepsilon_1) \supset C_p(x_2, \varepsilon_2) \supset \dots \supset$.
Αρα είναι φθινουσα ακολουθια κλειστων σφαιρών
και $C_p(x_n, \varepsilon_n)$ κλειστο $\forall n$
διαμ $C_p(x_n, \varepsilon_n) \leq 2\ \varepsilon_n \leq \frac{2}{n} \to 0$
Αρα, απο την Πρόταση (Cantor) $\exists x \in X$:
$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_p(x_n, \varepsilon_n) = \{x\}$ εχουμε $x \in C_p(x_1, \varepsilon_1) \subset G$
$\forall n \in \mathbb{N}$: $x \in C_p(x_n, \varepsilon_n) \subset U_n$
Συνεπώς, $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right) \cap G \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ πυκνό

Θεώρημα (Baire) 2η Μορφή

Αν (X, ρ) πλήρης μ.χ και (F_n) ακολουθία κλειστών συνόλων ωστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Τοτε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ/ω $(F_{n_0})^\circ \neq \emptyset$

Αποδ.
Εστω $(F_n)^\circ = \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$
Τα σωνολα $U_n = X \setminus F_n$, $n = 1, 2, \dots$
είναι ανοιχτά ως συμπληρωματα κλειστων
$U_n = X \setminus F_n = X \setminus (F_n)^\circ = X \setminus \emptyset = X \Rightarrow (U_n)$ ακολουθία

απο ανοιχτα και πυκνα.
Αρα, απο το Θεώρημα Baire: το συνολο
$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ είναι πυκνο.
ομως, $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n) = X \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = X \setminus X = \emptyset$
πραγμα ατοπο αφου $\emptyset$ οχι πυκνο.

Εφαρμογές του Θεωρήματος Baire στη Συναρτησιακή Ανάλυση

Θεώρημα:
Κάθε χώρος ~~Baire~~ Banach έχει είτε πεπερασμένη είτε υπεραριθμήσιμη διάσταση

Απόδειξη
Εστω οτι ο X χωρος Banach εχει μια απειρη και αριθμήσιμη βαση Hamel $\{e_1, e_2, \dots\} = \beta$
Θετουμε $F_n = span\{e_1, e_2, \dots\}$ $\forall n = 1, 2, \dots$
Κάθε F_n είναι πεπερ. διαστασης $\leq X$, άρα κλειστος
$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ διοτι β είναι βάση Hamel
Αρα, απο την δευτερη μορφή του Θεωρήματος Baire
$\exists n_0 \in \mathbb{N} : (F_{n_0})^{\circ} \neq \emptyset$, Συνεπως, $\exists x \in X$, $\varepsilon > 0 : S(x, \varepsilon) \subset F_{n_0}$
$S_X(0, \varepsilon) := S_X(x, \varepsilon) - x$
Αφου, $S_X(0, \varepsilon) \underset{x \in F_{n_0}}{\subset} F_{n_0} - F_{n_0} \underset{F_{n_0}\text{ γραμ. υποχ.}}{\subset} F_{n_0}$

Επισης, $\forall n \in \mathbb{N}$:
$n \cdot S_X(0, \varepsilon) \subset F_{n_0}$
Όμως, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_X(0, n \cdot \varepsilon) \subset F_{n_0}$ ατοπο γιατι καταλήξαμε οτι ενας χωρος απειρης διαστασης περιέχεται σε ενα χωρο πεπερασμενης διαστασης

$\left\{ e_1 = (1, 0, 0, \dots) \dots \; e_i = (0, \dots, \underset{i\text{-θεση}}{1}, 0, \dots, 0) \right\}$
$e_2 = (0, 1, 0, \dots)$

Εφαρμογή:
$C_{00}(\mathbb{N})$ εχει αριθμ. Hamel βαση $\Rightarrow$ εχει αριθμ. διασταση

Ετσι, δεν υπάρχει νορμα για τον $C_{00}(\mathbb{N})$ ωστε $(C_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|)$ να είναι χωρος Banach

ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

1) Αρχή ομοιομορφου φραγματος:

Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νορμα και $(T_i)_{i\in I}$ οικογένεια φραγμένων γραμμικών τελεστών δηλ. $(T_i)_{i\in I} \in \mathcal{B}(X,Y)$. Εαν $\forall x\in X$.
$\sup\{\|T_i(x)\| : i\in I\} < \infty$ (δηλ. η T_i φραγμενη κατά σημείο) τοτε το $\sup\{\|T_i\| : i\in I\} < \infty$ (δηλαδη. η $(T_i)_{i\in I}$ ομοιόμορφα φραγμένη)

Αποδειξη

Θεωρουμε τα συνολα:
$F_n = \{x\in X : \|T_i(x)\| \leq n, \forall i\in I\}$
Από υποθεση εχουμε οτι:
$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Επίσης, παρατηρούμε οτι καθε F_n είναι κλειστο και εφόσον $F_n = \underbrace{\bigcap_{i\in I} \underbrace{T_i^{-1}(B(0,n))}_{\text{κλειστο}}}_{\text{κλειστο}}$

κλειστό

Ετσι, απο το Θεώρημα του Baire (2η Μορφή)
$\exists n_0\in\mathbb{N} : F_{n_0}^{\circ} \neq \emptyset$
$\exists x_0\in X,\quad B_X(x_0, \varepsilon_0) \subset F_{n_0}$
Δηλ $\forall x\in X : \|x - x_0\| \leq \varepsilon$ ισχυει οτι $\|T_i(x)\| \leq n_0, \forall i\in I$
$\forall x\in X\ \|x\| \leq 1$ παίρνω $\forall i\in I$
$\|T_i(x)\| = \|\frac{1}{\varepsilon_0}\varepsilon_0 T_i(x)\| = \|\frac{1}{\varepsilon_0} T_i(\varepsilon_0 x)\| = \frac{1}{\varepsilon_0}\|T_i(\varepsilon_0 x)\| =$
$= \frac{1}{\varepsilon_0}\|T_i(x_0 + \varepsilon_0 x) - T_i(x_0)\| \leq \frac{1}{\varepsilon_0}\|T_i(x_0 + \varepsilon_0 x)\| + \|T_i(x_0)\| =$
$\leq \frac{1}{\varepsilon_0}(n_0 + n_0) = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot 2n_0 \Rightarrow \|T_i\| \leq \frac{2n_0}{\varepsilon_0}, \forall i\in I$

Αρα, $\sup\{\|T_i\| : i\in I\} < \infty$.

Σχόλιο: Βάση της αντιθετοαντιστροφής και υπό τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος του ομοιόμορφου φράγματος (δηλ. X Banach, $(T_i)_{i\in I} \in \mathcal{B}(X,Y)$, Y νορμικός χώρος) έχουμε ότι αν $\sup\{\|T_i\| : i\in I\} = +\infty$ τότε θα $\exists x\in X : \sup\{\|T_i(x)\| : i\in I\} = +\infty$

Πόρισμα (Θεώρημα Banach-Steinhaus)
Αν X χώρος Banach και Y νορμικός χώρος και $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ εν $\mathcal{B}(X,Y)$ ώστε $\forall x\in X : (T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον χώρο Y.
Τότε $T: X\to Y$ με $T(x) = \lim_n T_n(x)$ ανήκει στον $\mathcal{B}(X,Y)$

Απόδειξη
Η T γραμμική ως κατά σημείο όριο γραμμικών. $\forall x\in X : (T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και άρα φραγμένη. Αφού X Banach τότε από την αρχή ομοιομ. φράγματος $\exists M>0 : \|T_n\|\le M$ δηλαδή $\forall x\in X$
$\|T_n(x)\| \le \|T_n\|\cdot\|x\| \le M\cdot\|x\|$
Άρα, $\|T(x)\| = \|\lim_n T_n(x)\| \overset{\text{συνεχ. } \|\cdot\|}{=} \lim_n \|T_n(x)\| \le M\cdot\|x\|$
Άρα $T\in\mathcal{B}(X,Y)$

2) Θεώρημα Ανοιχτής Απεικόνισης:
Έστωσαν X, Y χώροι Banach και
$T: X\to Y$ φραγμένος γραμμ. τελεστής και επί
Τότε ο T είναι ανοιχτή απεικόνιση

Απόδειξη
Βήμα 1: $\exists\delta>0 : S_Y(0,\delta) \subset \overline{T(S_X(0,1))}$ (θδο)
Απόδ
$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_X(0,\frac{n}{2}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\cdot S_X(0,\frac{1}{2})$
Άρα, αφού T επί $\Rightarrow Y = T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nS_X(0,\frac{1}{2})) =$
$= \bigcup_{n=1}^{\infty} n\cdot T(S_X(0,\frac{1}{2}))$. Άρα, $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\cdot \overline{T(S_X(0,\frac{1}{2}))}$.

Εφόσον, Y πλήρης και το $\overline{nT(S_X(0,\frac{1}{2}))}$

τότε από το Θεώρημα Baire θα $\exists n \in \mathbb{N}$

ώστε $n \cdot \overline{T(S_X(0,\frac{1}{2}))} \neq \emptyset$

Εφόσον η συνάρτηση $\underset{x \mapsto nx}{X \longrightarrow X}$ ομοιομορφισμός

Προκύπτει ότι $(\overline{T(S_X(0,\frac{1}{2}))})^o \neq \emptyset$

Συνεπώς, $\exists y \in Y, \exists \delta > 0 : S_Y(y,\delta) \subset \overline{T(S_X(0,\frac{1}{2}))}$

Έχουμε ότι, $S_X(0,1) \supset S_X(0,\frac{1}{2}) - S_X(0,\frac{1}{2}) \Longrightarrow$

$\overset{T \gamma \rho \alpha \mu}{\Longrightarrow} T(S_X(0,1)) \supset T(S_X(0,\frac{1}{2})) - T(S_X(0,\frac{1}{2})) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \overline{T(S_X(0,1))} \supset \overline{T(S_X(0,\frac{1}{2})) - T(S_X(0,\frac{1}{2}))} \supseteq$

$\supseteq \overline{T(S_X(0,\frac{1}{2}))} - \overline{T(S_X(0,\frac{1}{2}))} \supset S_Y(y,\delta) - S_Y(y,\delta) \supset$

$\supset S_Y(y,\delta) - \{y\} = S_Y(0,\delta)$

$X \times X \to X$

$(x,y) \mapsto x-y$

συνεχής

Βήμα 2: $\exists \varepsilon > 0 : S_Y(0,\varepsilon)$ ώστε $S_Y(0,\varepsilon) \subset T(S_X(0,1))$

Από το Βήμα 1 συμπεραίνουμε

$S_Y(0,\frac{\delta}{2^n}) \subset \overline{T(S_X(0,\frac{1}{2^n}))}$

Θδο $S_Y(0,\frac{\delta}{2}) \subset T(S_X(0,1))$.

Έστω $y \in Y$ με $\|y\| < \frac{\delta}{2}$

Ισχυρισμός: Υπάρχει μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον X

(α) $\|x_n\| < \frac{1}{2^n}$, (β) $\|y - T(\sum_{i=1}^{n} x_i)\| < \frac{\delta}{2^{n+1}}$

Με επαγωγή

Εφόσον $y \in S_Y(0,\frac{\delta}{2}) \subset \overline{T(S_X(0,\frac{1}{2}))}$

Άρα, $\exists x_1 \in X$ με $\|x_1\| < \frac{1}{2}$ ώστε $\|y - T(x_1)\| < \frac{\delta}{4}$

(1ο επαγωγικό βήμα)

Υποθέτουμε λοιπόν ότι έχουν οριστεί τα $x_1, \dots, x_n$

ώστε να ικανοποιούν τις συνθήκες (α), (β)

$y - T(\sum_{i=1}^{n} x_i) \in S_Y(0,\frac{\delta}{2^{n+1}}) \subset \overline{T(S_X(0,\frac{1}{2^{n+1}}))}$

Άρα, $\exists x_{n+1} \in X$ με $\|x_{n+1}\| < \frac{1}{2^{n+1}}$

$\|y - T(\sum_{i=1}^{n} x_i) - T(x_{n+1})\| < \frac{\delta}{2^{n+2}}$

και η επαγωγή είναι πλήρης

Δηλ. το $y - T(\sum_{i=1}^{n+1} x_i) < \frac{\delta}{2^{n+2}}$ (αποδείχτηκε ο ισχυρισμός)

Έχουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \xRightarrow{X \text{ Banach}}$
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$
Ονομάζουμε $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ και τότε
$\|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < 1$ δηλ. $x \in S_X(0,1)$
$\|y - T(x)\| = \|y - T(\sum_{n=1}^{\infty} x_n)\| = \|y - T(\lim_n \sum_{i=1}^{n} x_i)\| =$
$= \|y - \lim_n T(\sum_{i=1}^{n} x_i)\| = \|\lim_n (y - T(\sum_{i=1}^{n} x_i))\| =$
$= \lim_n \|y - T(\sum_{i=1}^{n} x_i)\| = 0$
Άρα, $y = T(x) \in T(S_X(0,1))$

<u>ΒΗΜΑ 3:</u> Έστω $G \subset X$ ανοικτό και δνο $T(G)$ ανοιχτό
Έστω $y \in T(G) \Rightarrow y = T(x)$ με $x \in G$
Εφόσον G ανοιχτό τότε $\exists r > 0 : S_X(x,r) \subset G \Rightarrow$
$\Rightarrow T(S_X(x,r)) \subset T(G) \Rightarrow T(x + S_X(0,r)) \subset T(G) \Rightarrow$
$\Rightarrow T(x) + T(S_X(0,r)) \subset T(G) \Rightarrow$
$\Rightarrow y + r \cdot T(S_X(0,1)) \subset T(G) \quad (*)$
Επίσης $\exists$ $S_Y(y, r\varepsilon) = y + S_Y(0, r\cdot\varepsilon) = y + r \cdot S_Y(0,\varepsilon) \underset{\text{ΒΗΜΑ 2}}{=}$
$y + r\,T(S_X(0,1)) \underset{(*)}{\subseteq} T(G) \Rightarrow T(G)$ ανοιχτό.